Заседание районного методического объединения учителей математики «Профессиональная компетентность педагога как условие качественной подготовки обучающихся к ГИА»

"РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ № 12 ЕГЭ"

Умархаджиева С.С.,
учитель математики МБОУ
«Гимназия №5 г.Урус-Мартан»

10 декабря 2022 года

- Анализируя результаты ЕГЭ по математике, нужно отметить, что многие учащиеся не приступают к выполнению заданий из группы С, а если выполняют, то часто допускают ошибки. Причин здесь много. Одна из них недостаточное количество самостоятельно прорешенных заданий, не анализируются допущенные ошибки, и как правило полученные знания поверхностные, так как в основном рассматриваются только однотипные задания, и методы решений только стандартные.

- **В заданиии 13 ЕГЭ по математике профильного уровня требуется решить уравнение и осуществить отбор его корней, удовлетворяющих некоторому условию.**
- **Отбор корней является дополнительным пунктом условия задачи или логически вытекают из структуры самого уравнения. И опыт показывает, что данные ограничения как раз и представляют собой главную трудность для учащихся.**

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для тригонометрических уравнений применимы общие методы решения (разложение на множители, замена переменной, функционально-графические) и равносильные преобразования общего характера.

1. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

1. $$2\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)-9\cos\left(\frac{x}{3}\right)+3=0$$

2. $$\left(\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg} x-6\right)\cdot\sqrt{-\cos x}=0$$

2. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$

2. $3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 13\sin x \cdot \cos x$

3. $10\cos^2 x - 5\sin 2x = 4$

3. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

$\boxed{\mathbf{1.}}$ $6\sin x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin \frac{2}{x} = 0$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ **а)** $2\sin 2x - 4\cos x - \sin x + 1 = 0$

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРИОДИЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

$$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi n, n \in Z \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + 2\pi n, n \in Z \\ \alpha = -\beta + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \beta + \pi n, n \in Z \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

1. а) $\cos 6x = \cos 3x$; б) $x \in [0; \pi]$

2. а) $\sin x = \cos 7x$; б) $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 3x$

4. а) $\cos 2x + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$ б) $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$

СПОСОБЫ ОТБОРА КОРНЕЙ

- Арифметический способ
- Алгебраический способ
- Геометрический способ
- Функционально-графический способ

1. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ СПОСОБ

- Непосредственная подстановка корней в уравнение и имеющиеся ограничения
- Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней

ПОДСТАНОВКА КОРНЕЙ В ИМЕЮШИЕСЯ ОГРАНИЧЕНИЯ

Пример 10. *Найти корни уравнения* $\cos x = 0{,}5$, *удовлетворяющие неравенству* $\sin x \le 0$.

Решение. Из уравнения $\cos x = 0{,}5$ получаем $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, или $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Проверим для полученных значений x выполнение условия $\sin x \le 0$. Для первой серии получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0.$$

Следовательно, первая серия является «посторонней». Для второй серии получаем $\sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

ПЕРЕБОР ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПАРАМЕТРА И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ

а) Решите уравнение $\cos x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение.

а) $\cos x + \sin x = 0 \,|\, : \cos x$,

$tgx = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

б) Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Перебирая, подряд значения переменной, обозначающей целые числа, мы должны добиться того, чтобы найти все точки внутри промежутка и по одной точке слева и справа от данного промежутка.

$n = 0$, $x = \frac{\pi}{4} \notin \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

$n = 1$, $x = \frac{3\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

$n = 2$, $x = \frac{7\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

$n=3$, $x = \frac{11\pi}{4} \notin \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; б) $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ СПОСОБ

- Решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней
- Исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами (применяется при решении системы уравнений)

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАМЕТРА И ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ

а) Решите уравнение $6\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку. $[-\pi; 2\pi]$.

Решение.

а) Пусть $y = \cos x$, то $6y^2 - 7y - 5 = 0$.

$y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = \frac{5}{3}$ =? $\cos x = -\frac{1}{2}, \cos x = \frac{5}{3}$.

$\cos x = -\frac{1}{2}$ =? $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$,

$\cos x = \frac{5}{3}$ =? корней нет.

б) Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$

$-\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le 2\pi, n \in Z$

$-\frac{1}{6} \le n \le \frac{4}{3}$ =? при n = 0, $x = -\frac{2\pi}{3}$ и при n =1, $x = \frac{4\pi}{3}$.

$-\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 2\pi, k \in Z$

$-\frac{5}{6} \le k \le \frac{2}{3}$ =? при k = 0 $x = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ: а) $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$, б) $-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$.

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \sin \frac{5x}{2} = 1, \end{cases}$

Решение. При решении систем тригонометрических уравнений необходимо использовать разные обозначения целочисленных переменных при решении разных уравнений системы.

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \sin \frac{5x}{2} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi n, \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi m}{5}, m, n \in Z \end{cases}$$

Найдем такие целые значения m и n, при которых решения в полученных сериях совпадают. Приравнивая выражения для x в обеих сериях, получим $\pi n = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi m}{5}$,

$5n=1+4m$.

$4m=5n-1$, $m = \frac{5n-1}{4} = n + \frac{n-1}{4}$.

Для существования целых решений число $\frac{n-1}{4}$ должно быть целым. Обозначим его буквой k, тогда $\frac{n-1}{4} = k$, $n=4k+1$, $k \in Z$.

$$m = \frac{5n-1}{4} = \frac{20k+4}{4} = 5k+1, k \in Z$$

Подставляя в систему значения m и n, получим общее решение $x = \pi(4k+1), k \in Z$

Ответ: $x = \pi(4k+1), k \in Z$.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ

- Отбор корней тригонометрического уравнения на числовой окружности
- Отбор корней тригонометрического уравнения на числовой прямой

ОТБОР КОРНЕЙ НА ЧИСЛОВОЙ ОКРУЖНОСТИ

а) Решите уравнение $\cos(\frac{3\pi}{2}+2x)=\cos x$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

Решение.

а) $\cos(\frac{3\pi}{2}+2x)=\cos x$

$\sin 2x=\cos x$

$2\sin x\cos x-\cos x=0$

$\cos x(2\sin x-1)=0$

$\cos x=0$ или $2\sin x-1=0$

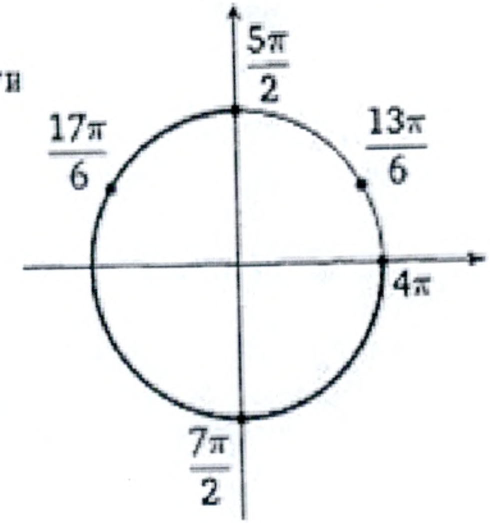
$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ $\qquad \sin x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z,$

$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m, m\in Z$

б) Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Для этого на единичной окружности отметим дугу равную данному отрезку и точки, соответствующие корням данного уравнения.



Итак, корнями, принадлежащими данному отрезку, являются числа $\frac{5\pi}{2};\frac{17\pi}{6};\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$, $\quad x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m, m\in Z$,

б) $\frac{5\pi}{2};\frac{17\pi}{6};\frac{7\pi}{2}$.

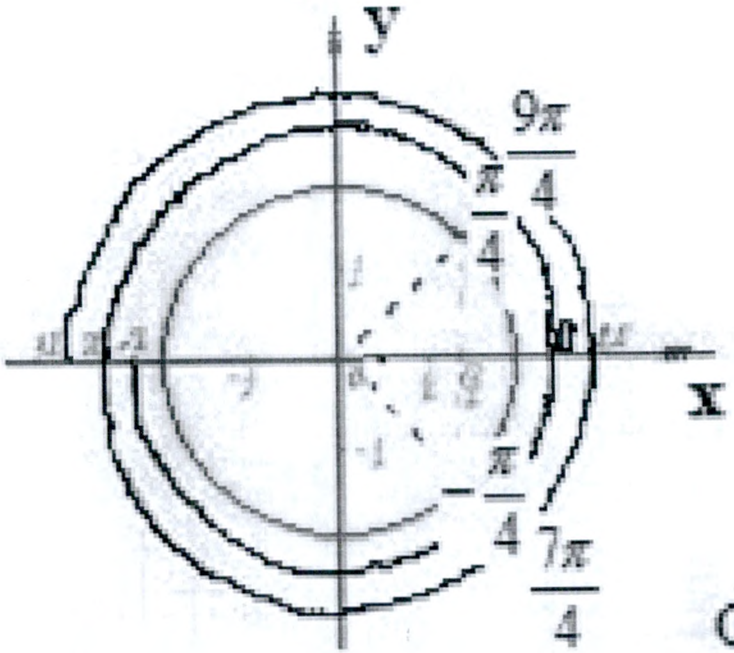
а) Решить уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 3\pi]$

Решение.

а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$,



Ответ: а) $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$;

б) $-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}$.

ОТБОР КОРНЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

а) Решите уравнение $\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}} = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку. $(-\pi; 11\pi]$

<u>Решение.</u>

а) Из условия получаем $\begin{cases} \cos\frac{x}{2} = 0, \\ \sin\frac{x}{3} \neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pi + 2\pi k \\ x \neq 3\pi n, k, n \in Z \end{cases}$ =>

Следует исключить те значения параметра k, которые приводят к совпадению корней числителя и знаменателя.

Приравняем значения x из системы. Решим диофантовое уравнение через частное решение.

$\pi + 2\pi k = 3\pi n, k, n \in Z \mid : \pi$

$1+2k=3n$,

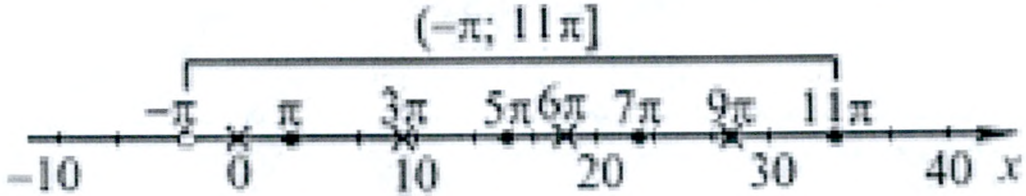
$3n-2k=1$, частное решение $n_0 = 1, k_0 = 1$. $3n - 2k = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1$, $3n - 3 \cdot 1 = 2k - 2 \cdot 1$,

$3(n-1) = 2(k-1)$, $\begin{cases} n - 1 = 2t \\ k - 1 = 3t, t \in Z \end{cases}$ =>

Следовательно, $x=\pi + 2\pi k$, $k \neq 3t + 1$, $k, t \in Z$

Следовательно, $x=\pi+2\pi k$, $k\neq 3t+1$, $k,t\in Z$

б) На числовой прямой рассмотрим промежуток $(-\pi;11\pi]$.



На числовой прямой отметим черными точками корни, принадлежащие полуинтервалу $(-\pi;11\pi]$. Это числа $\pi, 5\pi, 7\pi, 11\pi$.

Ответ: а) $x=\pi+2\pi k$, $k\neq 3t+1$, $k,t\in Z$

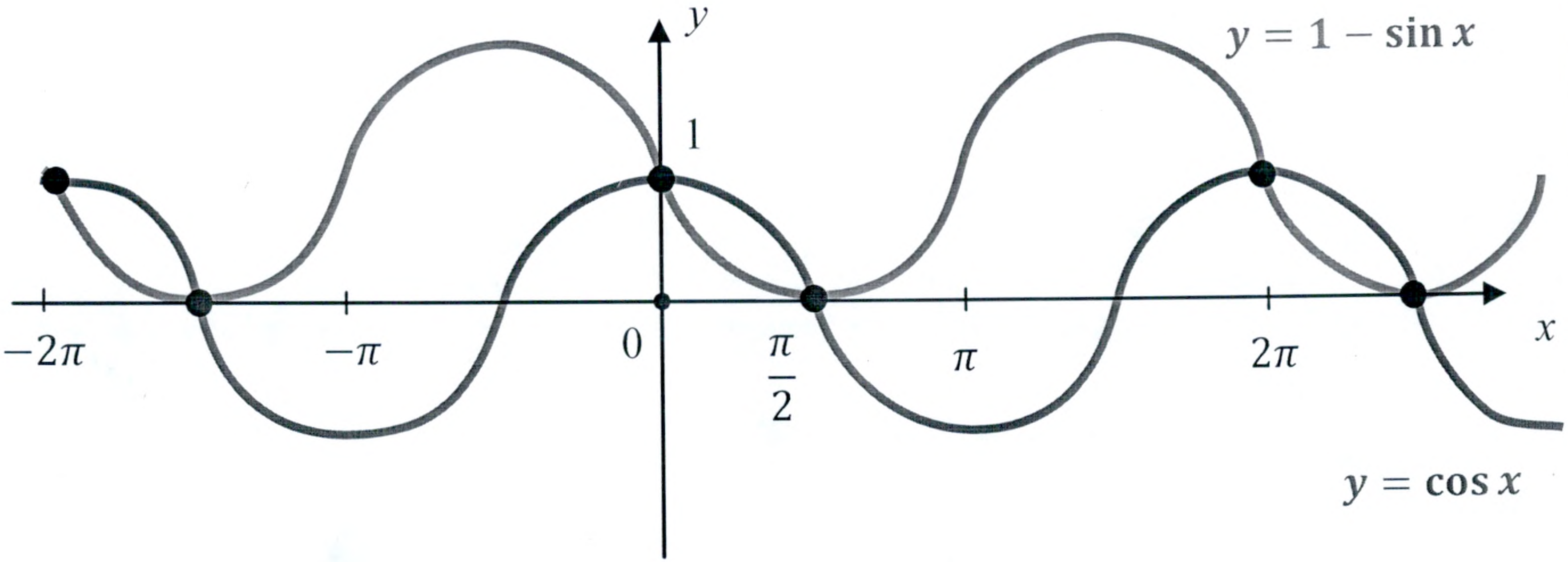
б) $\pi, 5\pi, 7\pi, 11\pi$

4. ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ

Решить уравнение $\boldsymbol{cos\,x + sin\,x = 1}$

В одной системе координат строим графики $y = \cos x$, $y = 1 - \sin x$.

Точки пересечения графиков являются решением этого уравнения.



а) Решите уравнение:

$$4\sin^3 x = \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

$$4\sin^3 x = \sin x.$$

$$4\sin^3 x - \sin x = 0$$

$$\sin x(4\sin^2 x - 1) = 0.$$

$$\sin x = 0$$

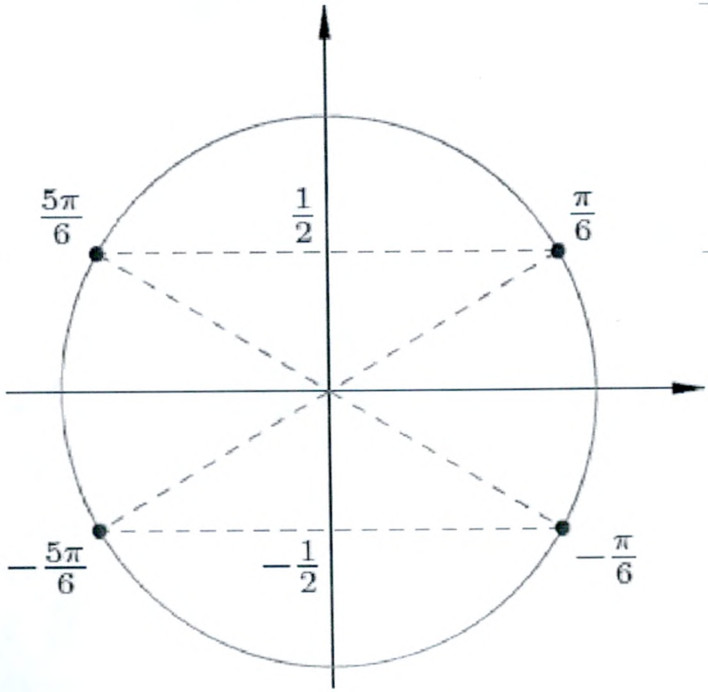
$$x = \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$$4\sin^2 x - 1 = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \pm\frac{1}{2}.$$

Решения уравнения $4\sin^2 x - 1 = 0$



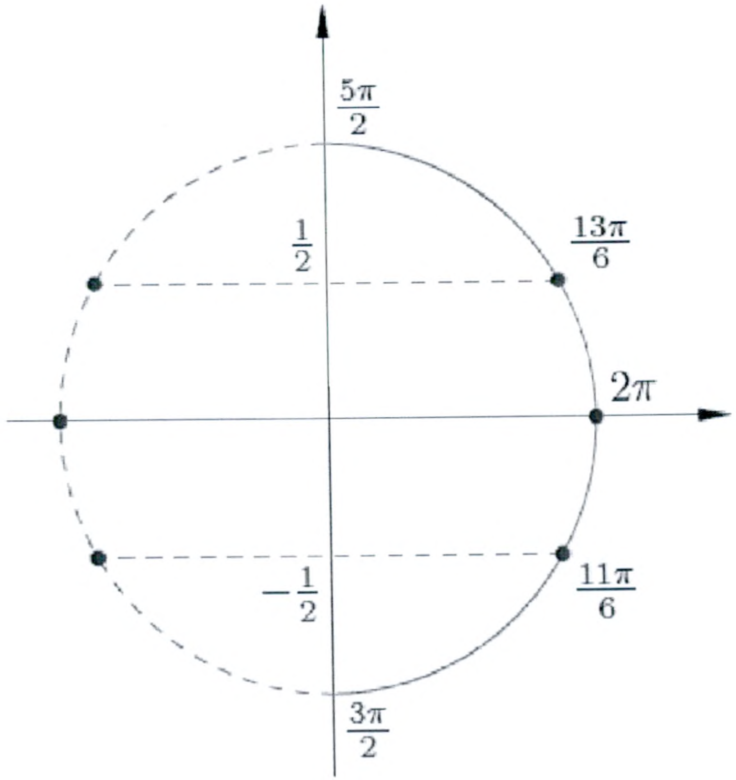
Эти четыре точки можно описать одной формулой

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Мы выполнили пункт а) задачи. Решения данного уравнения:

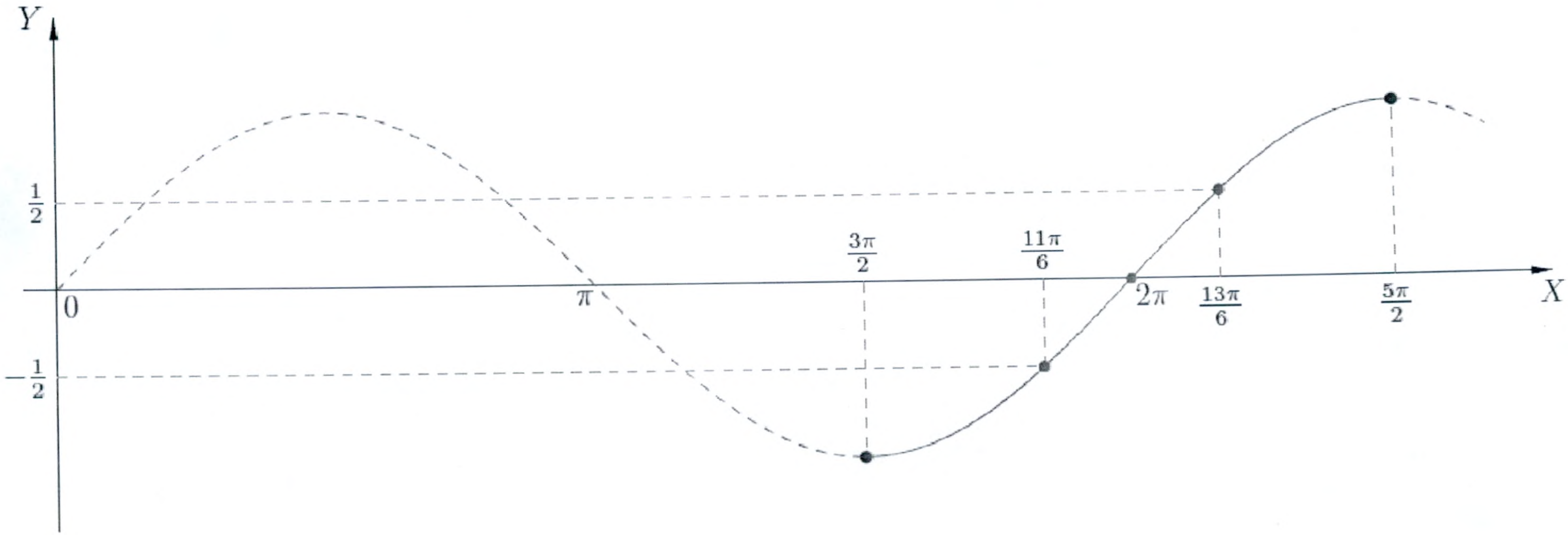
$$x = \pi n, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Первый способ. Отбор корней с помощью тригонометрической окружности.



Данный способ — простой, наглядный и универсальный.

Второй способ. Отбор корней с помощью графика.



Третий способ. Отбор корней с помощью двойных неравенств.

Берём первую серию решений ($x = \pi n$) и заключаем её в двойное неравенство:

$$\frac{3\pi}{2} \leqslant \pi n \leqslant \frac{5\pi}{2}.$$

Сокращаем на π:

$$\frac{3}{2} \leqslant n \leqslant \frac{5}{2}.$$

С учётом того, что n — целое, получаем единственную возможность $n = 2$. Стало быть, данная серия даёт нам решение 2π на отрезке $[3\pi/2; 5\pi/2]$.

Вторую серию решений ($x = \pm\pi/6 + \pi n$) мы для удобства разобьём на две:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Сначала имеем:

$$\frac{3\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant \frac{5\pi}{2}.$$

Снова сокращаем на π:

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{1}{6} + n \leqslant \frac{5}{2},$$

и вычитаем 1/6 из всех частей неравенства:

$$\frac{4}{3} \leqslant n \leqslant \frac{7}{3}\,.$$

Для n получается единственное значение: $n = 2$. Соответственно, серия x_1 даёт на отрезке $[3\pi/2; 5\pi/2]$ следующее решение:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}\,.$$

Остаётся разобраться с серией x_2. Имеем:

$$\frac{3\pi}{2} \leqslant -\frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant \frac{5\pi}{2}\,.$$

После сокращения на π и прибавления 1/6 получим:

$$\frac{5}{3} \leqslant n \leqslant \frac{8}{3}\,.$$

И снова единственный случай: $n = 2$. Тогда серия x_2 даёт:

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}\,.$$

Ответ: а) πn, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 2π, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$.

а) Решите уравнение:

$$2\log_2^2(2\sin x) - 7\log_2(2\sin x) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

а) Используем замену $\log_2(2\sin x) = t$. Тогда уравнение принимает вид:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0.$$

Дискриминант данного уравнения равен:

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25.$$

Тогда корни уравнения равны:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{25}}{2\cdot 2} \\ t_2 = \frac{-(-7)+\sqrt{25}}{2\cdot 2}. \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = 3. \end{array}\right.$$

Обратная подстановка приводит к следующему результату:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2(2\sin x) = \frac{1}{2} \\ \log_2(2\sin x) = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x = 2^{\frac{1}{2}} \\ 2\sin x = 2^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x = \sqrt{2} \\ 2\sin x = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = 4. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = 4. \end{array}\right.$$

Второе уравнение не имеет корней, поскольку $0 \leqslant |\sin x| \leqslant 1$. Решением второго уравнения является серия:

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z.$$

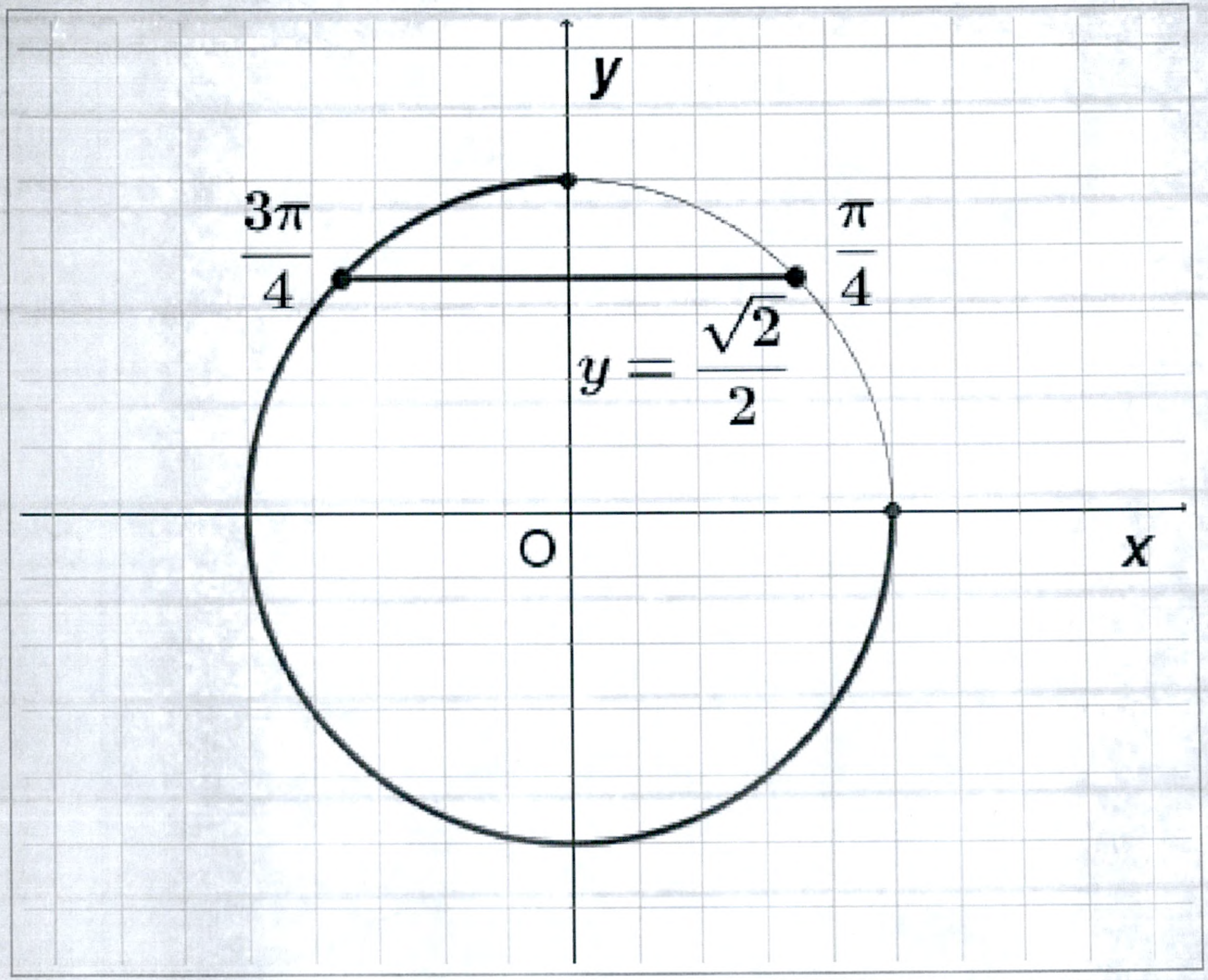
Получаем следующую серию:

$$x = (-1)^n \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) + \pi n,\ n \in Z.$$

Эту серию можно записать иначе:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

б) Осуществляем отбор решений с помощью единичной окружности. На рисунке множество $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ выделено красным цветом:



Из рисунка видно, что подходит только один корень: $x = \frac{3\pi}{4}$.

а) Решите уравнение:

$$2\log_2^2(2\sin x) - 7\log_2(2\sin x) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Ответ: а) $x = (-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right) + \pi n,\ n \in Z,$

б) $\frac{3\pi}{4}$.

А.Эйнштейн говорил так…

«Мне приходится делить время между политикой и уравнениями. Однако, уравнения, по-моему, важнее. Политика только для данного момента, а уравнения будут существовать вечно.»